3.2 Určenie fundamentálnej matice

Uvažujme nasledujúci systém

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}\,, \tag{3.8}$$

kde $\mathbf{A}$ je konštantná matica a začiatočná podmienka je $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, $t_0 \in J$, hľadajme riešenie rovnice (3.8) v tvare

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{r}e^{\lambda t}\,, \tag{3.9}$$

kde λ je konštanta (vo všeobecnosti komplexná) a

$$\mathbf{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_n)^T$$

je konštantný vektor.

Substitúciou $\mathbf{u}$ do (3.8) dostávame

$$\lambda\mathbf{r}e^{\lambda t} = \mathbf{A}\mathbf{r}e^{\lambda t}$$

alebo

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{r} = \mathbf{0}\,, \tag{3.10}$$

kde $\mathbf{E}$ je jednotková matica $n \times n$.

Funkcia $\mathbf{u}(t) = \mathbf{r}e^{\lambda t}$ je riešením rovnice (3.8) (netriviálnym), vtedy a len vtedy, ak

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = P_n(\lambda) = 0\,,$$

kde P_n je polynóm n – tého stupňa.

Rovnica

$$P_n(\lambda) = 0 \tag{3.11}$$

sa nazýva **charakteristická rovnica** systému (3.8) a jej korene (nemusia byť rôzne) λ_i sa nazývajú **vlastné hodnoty** (tiež **charakteristické hodnoty**) matice $\mathbf{A}$.

Polynóm P_n odpovedajúci matici **A** sa nazýva **charakteristický polynóm.**

Pre $n=3, \mathbf{r} = (\alpha, \beta, \gamma)^T$ systém (3.10) má tvar

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)\alpha + a_{12}\beta \quad + \quad a_{13}\gamma = 0, \\ a_{21}\alpha \quad + (a_{22} - \lambda)\beta + \quad a_{23}\gamma = 0, \\ a_{31}\alpha \quad + a_{32}\beta \quad + (a_{33} - \lambda)\gamma = 0 \end{aligned}$$

a rovnica (3.11) má tvar

$$P_n(\lambda) = \begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & (a_{33} - \lambda) \end{vmatrix} = 0 .$$

Systém (3.10) môže byť vyjadrený tiež v tvare

$$\mathbf{Ar} = \lambda \mathbf{r} , \qquad (3.12)$$

kde nenulový vektor **r** sa nazýva **vlastný vektor** matice **A** odpovedajúci vlastnej hodnote λ matice **A**. Triviálne riešenie rovnice (3.8) dostaneme keď **r** je nulový vektor. Ak λ je vlastnou hodnotou matice **A**, tak vlastný vektor odpovedajúci λ je riešením rovnice (3.10). Rovnica (3.10) má nenulové riešenie **r**, pretože matica $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})$ je singulárna.